INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+3$ şi numărul

$$S=\frac{1}{f(0)\cdot f(1)}+\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}, n\geq 1.$$

a) Verificați egalitatea: $\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5n-2}-\frac{1}{5n+3}\right), \forall n\geq 1$.

b) Demonstrați că $S=\frac{n}{15n+9}, \forall n\geq 1$.

c) Să se determine numărul natural n, astfel încât $\frac{1}{\sqrt{S}}$ să fie număr natural.

<u>Soluție:</u>

a) Verificare 1p

b) $\frac{1}{f(0)\cdot f(1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$ 1p

$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{13}\right)$ 1p

$\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5n-2}-\frac{1}{5n+3}\right)$ 1p

Se adună relațiile şi obținem $S=\frac{n}{15n+9}$ 2p

c) Se impune condiția ca $\frac{1}{S}$ să fie număr natural şi pătrat perfect, de unde găsim n = 9 .... 1p

2. Doi elevi citesc câte o carte astfel:
Primul citeşte în prima zi două pagini, apoi în fiecare zi citeşte un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. Al doilea elev, citeşte în prima zi 3 pagini, a doua zi 12 pagini şi în fiecare dintre zilele următoare cu **3p** pagini mai mult decât în ziua precedentă, unde **p** este numărul cu 1 mai mic decât dublul numărului zilei curente.

a) Demonstrați că, în a n-a zi, primul elev citeşte 2^n pagini, iar cel de-al doilea elev citeşte $3n^2$ pagini, utilizând metoda inducției matematice, $n\geq 1$.

b) Stabiliți, începând cu ce zi, primul elev va citi un număr de pagini mai mare decât numărul de pagini citite de al doilea elev.

Soluție:

a) Primul elev citește $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$ pagini (utilizând metoda inducție matematice). Al doilea elev, în ziua 1 citește $3 \cdot 1^2$ pagini, în ziua 2 citește $3 \cdot 2^2$ pagini, în ziua 3 citește $3 \cdot 3^2$ pagini și așa mai departe, în ziua n citește $3 \cdot n^2$ (utilizând metoda inducție matematice) 3p

b) Se arată că $2^n > 3 \cdot n^2, \forall n \geq 8$ 3p

Începând cu a 8-a zi primul elev va citi mai multe pagini decât al doilea elev 1p

3. Fie mulțimea $A = \left\{(x, a) \middle| 2x^2 - 2ax + x + a^2 - 2a = 0,\ x \in Z,\ a \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Să se determine a, dacă $(1, a) \in A$.
b) Să se determine x, dacă $(x, 1) \in A$.
c) Să se determine mulțimea A, știind că aceasta are cel puțin un element.

Soluție:

a) Dacă $(1, a) \in A$, atunci $a^2 - 4a + 3 = 0$, de unde a = 1 sau a = 3 .... 2p

b) Dacă $(x, 1) \in A$, atunci $2x^2 - x - 1 = 0$, de unde x = 1 .... 2p

c) Din ipoteză, există x întreg și a real astfel încât $2x^2 - 2ax + x + a^2 - 2a = 0$ 1p

Cum a este real ecuația $a^2 - 2 \cdot (1+x) \cdot a + 2x^2 + x = 0$ are $\Delta \geq 0$. Deducem că $x^2 - x - 1 \leq 0$ 1p

Găsim A = {(0,0); (0,2); (1,1); (1,3)} 1p

4. În triunghiul ABC, fie punctele M, N și P astfel încât: $4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BA}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right)$.

b) Demonstrați că punctele M, N și P sunt coliniare.

Soluție:

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$ 1p

Obținem $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right)$ 2p

b) Avem $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP}$ 1p

Obținem $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right)$ 1p

Rezultă că $\overrightarrow{NP} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$ 1p

Concluzia: Punctele M, N și P sunt coliniare 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=4z-\overline{z}$, unde $\overline{z}$ reprezintă conjugatul numărului complex z.

a) Determinaţi $z\in\mathbb{C}$, dacă $f(z)=2013+2015\cdot i$.

b) Calculaţi $(f\circ f)(z)$.

c) Demonstraţi că funcţia dată este bijectivă .

<u>Soluţie:</u>

a) Alegând z = x + i·y, obţine f(z) = 3·x + 5i·y 1p
Identificând obţinem z = 671 + 403·i 1p
b) Calculează $(f\circ f)(z)=f\left(4z-\overline{z}\right)=17z-8\overline{z}$ 2p
c) Verificăm că funcţia este injectivă şi surjectivă 1p
Pentru injectivitate, verificăm $f(z_1)=f(z_2)\Rightarrow z_1=z_2$.
Fie $z_1=x_1+i\cdot y_1$ şi $z_2=x_2+i\cdot y_2$.
Atunci $f(z_1)=f(z_2)\Leftrightarrow 3\cdot x_1+5i\cdot y_1=3\cdot x_2+5i\cdot y_2$, deci $x_1=x_2$ şi $y_1=y_2$ 1p
Pentru surjectivitate verificăm că $\forall w\in\mathbb{C},\exists z\in\mathbb{C}$ astfel încât $f(z)=w$.
Pentru $w=a+ib$ fixat , există $z=\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\cdot i$ astfel încât $f(z)=w$
Aşadar funcţia este surjectivă 1p

2. Plecat în vacanţă împreună cu părinţii, în maşina familiei, Costel a adormit după ce a constatat că trecuseră 342 de kilometri de la plecare. După ce s-a trezit a constatat amuzat că numărul kilometrilor parcurşi, de la plecare, era tot un număr par care se putea forma cu aceleaşi cifre ca şi numărul kilometrilor văzuţi înainte de a adormi.

a) Câţi km au fost parcurşi până în momentul trezirii lui Costel ?

b) După ce a văzut că dormise 90 de minute, precizaţi viteza medie cu care s-a deplasat maşina cât timp a dormit Costel, ştiind că nu a făcut nici o oprire .

<u>Soluţie:</u>

a) Deduce că numărul kilometrilor parcurşi până la trezire este 432 .... 2p
b) Distanţa parcursă pe durata somnului a fost de 90 de km 2p
Viteza medie a fost 60km/h 3p

3. Se consideră următoarele şiruri de numere $x_n = \frac{2013^n + 2012n - b}{a}$ şi $y_n = \frac{2013^n - 2012n + b}{a}$, unde a, b$\in\mathbb{R}^*$ (arbitrar fixați), iar n$\in\mathbb{N}^*$. Dacă $(z_n)_{n\geq1}$ este un şir de numere reale astfel încât $z_n = x_n - y_n$, se cere:

a) Demonstrați că şirul $(z_n)_{n\geq1}$ este progresie aritmetică.

b) Demonstrați că raportul $\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{x_n + y_n}$ nu depinde de n .

Soluție:

Obține $z_n = x_n - y_n = \frac{4024n - 2b}{a}$ 2p

Verifică $z_{n+1} - z_n = \frac{4024}{a}$ (constant), deci şirul este o progresie aritmetică 2p

b) Obține $x_n + y_n = \frac{2\cdot 2013^n}{a}$ 1p

Obține $\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{x_n + y_n} = 2013$, exact ce trebuia demonstrat 2p

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

a) Rezolvați ecuația $2\cdot f(3x) = 5$.

b) Determinați valorile parametrului real m ştiind că ecuația f(x) = m admite o singură rădăcină reală .

c) Rezolvați ecuația $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, în mulțimea numerelor reale.

Soluție:

Obține ecuația: $2^{3x} + 2^{-3x} = \frac{5}{2}$ 1p

Obține : $2^{3x} = 2$, sau $2^{3x} = \frac{1}{2}$ 1p

Finalizare: $x = \frac{1}{3}$, sau $x = -\frac{1}{3}$ 1p

Notând $2^x = t, t > 0$ ecuația devine $t^2 - m\cdot t + 1 = 0$ 1p

Ecuația are o singură rădăcină atunci când $\Delta = 0$, iar $t_1 = t_2 > 0$ sau când $\Delta > 0$ şi $t_1\cdot t_2 < 0$.......... 1p

Cum ultima opțiune nu este admisibilă deoarece $t_1\cdot t_2 = 1 > 0$, rămâne că $\Delta = 0$, iar m = 2 .... 1p

c) Observând că $f(x) \geq 2$ şi $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \leq 2$, deducem că singura rădăcină este x = 0 .... 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră matricile $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

b) Determinați valorile parametrilor reali m şi n dacă $A^3=m\cdot A+n\cdot I_2$.

c) Demonstrați că $A^{2013}+A^{2012}=2^{2012}\cdot(A+I_2)$.

<u>Soluție:</u>

a) $\det(A-xI_2)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3-x & 2\\ -2 & -2-x\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x\in\{-1,2\}$ 3p

b) Obține $A^3=m\cdot A+n\cdot I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}11 & 6\\ -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3m+n & 2m\\ -2m & -2m+n\end{pmatrix}$ 1p

Finalizare: m = 3, n = 2 .... 1p

c) Prin inducție vom demonstra $P(n): A^{n+1}+A^n=2^n\cdot(A+I_2), n\geq 1$ şi apoi particularizăm n = 2012

Verificare $P(1): A^2+A^1=2^1\cdot(A+I_2)$ 1p

Demonstrarea implicației $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ 1p

2. O matrice pătratică de ordinul al treilea are toate elementele egale cu 1, 2 sau 3 (cel puțin câte unul din fiecare). Ştiind că suma tuturor elementelor matricei este egală cu 17, iar numărul elementelor egale cu 1 este cel puțin patru, se cere:

a) Să se afle câte elemente sunt din fiecare?

b) Exemplificați că printre matricele anterior determinate există atât matrice neinversabile cât şi matrice inversabile.

<u>Soluție:</u>

a) Fie x , y şi z numărul elementelor respectiv egale cu 1, 2 sau 3.

Atunci: x + y + z = 9 şi x + 2y + 3z = 17, x > y, x > y 1p

Deduce y + 2z = 8 .... 1p

Dintre cazurile posibile numai x = 4, y = 2, z = 3 convine 3p

b) Exemplu de matrice inversabilă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}, \det(A)=2$ 1p

Exemplu de matrice neinversabilă $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}, \det(B)=0$ 1p

3. Se consideră funcția $f_k:(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_k(x)=\sqrt{x^2+x}-k\cdot x$, unde k este un număr real fixat.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{2012}(x)}{f_{2013}(x)}$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty}f_k(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1$

Soluție:

a) Scrie $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{2012}(x)}{f_{2013}(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-2012x}{\sqrt{x^2+x}-2013x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-2012\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-2013\right)}=\frac{2011}{2012}$ 3p

b) Pentru k > 1 obținem $\lim\limits_{x\to\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-k\right)=-\infty$, nu convine 1p

Pentru k < 1 obținem $\lim\limits_{x\to\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-k\right)=+\infty$, nu convine 1p

Pentru k = 1 vom avea $\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\frac{1}{2}$ 2p

4. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

a) Determinați asimptotele verticale ale funcției.
b) Determinați asimptotele către $+\infty$ ale funcției.
c) Demonstrați că ecuația f(x) = 0 admite cel puțin o rădăcină subunitară.

Solutie:

a) Putem avea asimptote verticale doar la dreapta lui zero;

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\left[x+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=-\infty$, rezultă ca x = 0 este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcției 2p

b) Analizăm existența asimpotelor orizontale:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=\infty$, deci nu există asimptote orizontale 1p

Căutăm asimptote oblice către $+\infty$, de forma y = mx + n

m = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[x+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=1$ 1p

n = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-x\right)=0$ 1p

Aşadar, y = x este asimptotă oblică către $+\infty$, pentru graficul funcției f.

c) Deoarece funcția f este continuă, $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=-\infty$, iar $f(1)=1+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{e}{2}>0$

Deducem că există cel puțin un $c\in(0,1)$ astfel încât f (c)=0 (proprietatea Darboux) 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. a) Calculați $F(x)=\int \frac{1}{2^x+3}dx,\ x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{\log_2 3}^{\log_2 5}\frac{1}{2^x+3}dx$.

c) Demonstrați că F(x) este o funcție injectivă pe mulțimea $\mathbb{R}$.

Soluție:

Notăm $2^x=t \Rightarrow dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t}$ 2p

Atunci $F^*(t)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\frac{dt}{t(t+3)}$. Obține $F^*(t)=\frac{1}{\ln 8}\cdot\ln\left(\frac{t}{t+3}\right)+C$ 1p

Finalizare : $F(x)=\frac{1}{\ln 8}\cdot\ln\left(\frac{2^x}{2^x+3}\right)+C$ 1p

b) $\int_{\log_2 3}^{\log_2 5}\frac{1}{2^x+3}dx=F(x)=\frac{1}{\ln 8}\cdot\ln\left(\frac{2^x}{2^x+3}\right)\Bigg|_{\log_2 3}^{\log_2 5}=\frac{1}{\ln 8}\left(\ln\frac{5}{8}-\ln\frac{3}{6}\right)=\frac{\ln 5-2\ln 2}{3\ln 2}$ 1p

c) Deoarece $F'(x)=\frac{1}{2^x+3}>0,$ pentru orice număr real x , rezultă că funcția F(x) este strict crescătoare, deci este funcție injectivă 2p

2. Pe mulțimea $K=(0,\infty)\times\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $(a,x)\circ(b,y)=(ab,x+ay)$, pentru orice perechi $(a,x),(b,y)\in K$.

a) Verificați asociativitatea legii de compoziție.

b) Determinați perechea $(a,x)\in K$ care verifică relația $\underbrace{(a,x)\circ\ldots\circ(a,x)}_{de 9 ori}=(512,-511)$.

c) Dați exemplu de o pereche $(a,x)\in K$ care să nu comute cu perechea (2012, -2013).

Soluție:

a) Arătăm că $\left[(a,x)\circ(b,y)\right]\circ(c,z)=(a,x)\circ\left[(b,y)\circ(c,z)\right]$, pentru orice perechi din K.

Astfel $\left[(a,x)\circ(b,y)\right]\circ(c,z)=(abc,abz+ay+x)$ 1p

$(a,x)\circ\left[(b,y)\circ(c,z)\right]=(abc,abz+ay+x)$ 1p

b) Obține $\underbrace{(a,x)\circ\ldots\circ(a,x)}_{de 9 ori}=\left(a^9,x\left(a^8+a^7+\ldots+a+1\right)\right)$ 2p

Deduce a = 2 .... 1p

Deduce x = -1 .... 1p

c) Un exemplu îl constituie perechea $(2,1)$, deoarece $(2,1)\circ(2012,-2013)=(4024,-4025)$,

iar $(2012,-2013)\circ(2,1)=(4024,-1)$ 1p

3. Fie funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definite astfel: $f_1(x)=x$ iar $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt,\ \ n\geq 1$.

a) Demonstrați că $f_3(x)=\dfrac{x^3}{6}$.

b) Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$, pentru orice număr natural nenul n.

Soluție:

a) Obține $f_2(x)=\int_0^x tdt=\dfrac{x^2}{2}$ 2p

Finalizare: $f_3(x)=\int_0^x f_2(t)dt=\int_0^x \dfrac{t^2}{2}dt=\dfrac{x^3}{6}$ 2p

b) Verificare: $P(1): f_1(x)=x$ este adevărată 1p

Presupunând P(k): $f_k(x)=\dfrac{x^k}{k!}$ adevărată, vom demonstra că şi P(k+1): $f_{k+1}(x)=\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ este adevărată.

Pentru aceasta: $f_{k+1}(x)=\int_0^x f_k(t)dt=\int_0^x \dfrac{t^k}{k!}dt=\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ 2p

4. a) Determinați soluțiile ecuației $x^3=x$, în inelul $(Z_4,+,\cdot)$.

b) Numim "*potrivită*" o tripletă de tipul $\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b} & \hat{c}\end{pmatrix}$ cu $\hat{a},\hat{b},\hat{c}\in Z_4$ şi $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=\hat{0}$. Determinați tripletele "*potrivite*" de tipul $\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b} & \hat{2}\end{pmatrix}$.

c) Câte triplete "*potrivite*" există ?

Soluție:

Analizând cazurile posibile se constată că $\hat{0},\hat{1},\hat{3}$ sunt soluții 3p

b) Tripletele "*potrivite*" de tipul $\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b} & \hat{2}\end{pmatrix}$ sunt: $\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1} & \hat{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2} & \hat{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{3} & \hat{2}\end{pmatrix}$.. 2p

c)Tripletele "*potrivite*" sunt: $\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2} & \hat{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1} & \hat{2}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{3} & \hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{3} & \hat{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{2} & \hat{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{3} & \hat{2}\end{pmatrix}$ 2p